数理解析研究所講究録
第2053巻 2017年 30-42

群行列式に関するFrobeniusの定理の一般化

九州大学共進化社会システム創成拠点
山口尚哉 (Naoya YAMAGUCHI)
n-yamaguchi@imi.kyushu-u.ac.jp

1 はじめに

有限群に対して, 群行列と群行列式という概念がある. 群行列は, 群の元に対する不定元を成分にもつある行列のことで, この群行列の行列式を群行列式という. Frobenius は群行列式の $\mathbb{C}$ 上の既約分解を与えた. この結果を Frobenius の定理という.

本研究者は, 群行列と群行列式を拡張することにより, Frobenius の定理の一般化を与えた. また, この定理を得る過程でいくつかの興味深い事実に遭遇した. この興味深い事実は, 多項式環 $\mathbb{C}[x_g; g \in G]$ を群環 $\mathbb{C}[x_g; g \in G] \otimes \mathbb{C}G$ というより豊かな土壌に拡大し, この環の中で群行列のスペクトルや群行列式を調べることにより得られる.

本稿では, まず群行列, 群行列式, Frobenius の定理について説明し, そのあとに群行列と群行列式の拡張について述べる. それから拡張した群行列のスペクトルや拡張した群行列式の性質を説明し, 読者を Frobenius の定理の一般化へと徐々に誘う.

2 群行列と群行列式

有限群 G に対して, 群行列と群行列式という概念がある. 本節では, 群行列と群行列式の定義を述べ, これらの意味を説明する.

集合 G を有限群, n を G の位数, x_g を $g \in G$ に対するそれぞれ可換な不定元, そして $R = \mathbb{C}[x_g; g \in G]$ を, 複素数体 $\mathbb{C}$ に係数を持つ不定元 $\{x_g \mid g \in G\}$ に関する多項式環とする. このとき, G の群行列 $M(G)$ を $M(G) = (x_{gh^{-1}})_{g,h \in G} \in \mathrm{Mat}(n, R)$, G の群行列式 $\Theta(G)$ を $\Theta(G) = \det M(G) \in R$ で定義する. 以下は群行列と群行列式の例である.

例 1. 群 $G = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \{0, 1\}$ とする. このとき

$$M(G) = \begin{bmatrix} x_0 & x_1 \\ x_1 & x_0 \end{bmatrix}, \quad \Theta(G) = x_0^2 - x_1^2$$

となる.

群行列の意味を述べる. 群行列 $M(G)$ は, G の正則表現のある行列表示 L の各点 g での値 $L(g)$ に x_g という係数を付けたものの G 全体における和である. つまり行列表現 L が存在して

$$M(G) = \sum_{g \in G} x_g L(g)$$

が成り立つ. 不定元 x_g を $x_g \in \mathbb{C}$ とみなせば, これは $M(G)$ が群環 $\mathbb{C}G$ の行列表示であることを意味する. 上述について詳しく説明する.

群 $G = \{g_1, g_2, \ldots, g_n\}$ とする. このとき, 任意の $g \in G$ に対して

$$\begin{pmatrix} g_1 & g_2 & \cdots & g_n \\ gg_1 & gg_2 & \cdots & gg_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_1 & g_2 & \cdots & g_n \\ g_{\sigma_g(1)} & g_{\sigma_g(2)} & \cdots & g_{\sigma_g(n)} \end{pmatrix}$$

により, 対称群 S_n への忠実な表現 $L : G \ni g \mapsto \sigma_g \in S_n$ が定まる. この表現 L を G の (左) 正則表現という. 正則表現 L の行列表示を

$$L(g)_{ij} = \begin{cases} 1 & i = \sigma_g(j) \\ 0 & i \neq \sigma_g(j) \end{cases}$$

で与えれば, G の忠実な行列表現 $L : G \ni g \mapsto L(g) \in \mathrm{Mat}(n, \mathbb{C})$ が得られる. ここで, 条件 $i = \sigma_g(j)$ は $g_i = gg_j$ と同値なので,

$$\left(\sum_{g \in G} x_g L(g) \right)_{ij} = x_{g_i g_j^{-1}}$$

が成り立つ.

次は群行列式の意味を述べる. 群行列式 $\Theta(G)$ は, 群環 $\mathbb{C}G$ の元が可逆であるかどうかを判別する式である. つまり不定元 x_g を $x_g \in \mathbb{C}$ とみなしたとき, $\sum_{g \in G} x_g g \in \mathbb{C}G$ が逆元を持つことの必要十分条件は, $\Theta(G) \neq 0$ であることがわかる ([28, Corollary 25]). また群行列式は, 2 つの群が与えられたときにこれらが同型か否かを判別する式にもなっている ([4, Theorem 5]).

3 Frobenius の定理

群行列式の $\mathbb{C}$ 上の既約分解を与える定理を, Frobenius の定理という. Frobenius はこの定理を求める過程において, 有限群の表現論を構築した ([23]). 本節では, Frobenius の定理について説明する.

集合 $\widehat{G}$ を, G の $\mathbb{C}$ 上の既約表現の同値類の代表元の完全集合とする. 次の定理を Frobenius の定理という.

定理 2 (Frobenius の定理 [3]). 群行列式 $\Theta(G)$ の $\mathbb{C}$ 上の既約分解は, 以下で与えられる.

$$\Theta(G) = \prod_{\varphi \in \widehat{G}} \det \left(\sum_{g \in G} x_g \varphi(g) \right)^{\deg \varphi}.$$

Frobenius の定理の例を与える.

例 3. 群 $G = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} = \{0, 1, 2\}$ とする. このとき

$$\begin{aligned}\Theta(G) &= \det \begin{bmatrix} x_0 & x_2 & x_1 \\ x_1 & x_0 & x_2 \\ x_2 & x_1 & x_0 \end{bmatrix} \\ &= (x_0 + x_1 + x_2)(x_0 + x_1\omega + x_2\omega^2)(x_0 + x_1\omega^2 + x_2\omega)\end{aligned}$$

となる. ただし, ω は 1 の原始 3 乗根の 1 つとする.

これから Frobenius の定理の証明を与える. Frobenius の定理の等号成立は, 以下の定理から直ちにわかる.

定理 4 ([17, Theorem 4.4.4]). 写像 L を G の正則表現, $\widehat{G} = \{\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_s\}$, そして $d_i = \deg \varphi_i$ とする. このとき, L は以下のように直和分解できる.

$$L \sim d_1\varphi_1 \oplus d_2\varphi_2 \oplus \cdots \oplus d_s\varphi_s.$$

Frobenius の定理が群行列式の既約分解を与えていることを示す. そのために, 以下の 2 つの補題を用意する.

補題 5. 行列 $\varphi = (\varphi_{ij})_{1 \le i \le m, 1 \le j \le m}$ を G の m 次の既約なユニタリ表現とする. このとき, $\{\varphi(g) \in \mathrm{Mat}(m, \mathbb{C}) \mid g \in G\}$ は $\mathrm{Mat}(m, \mathbb{C})$ の線型空間としての生成系になっている. つまり, $\left\{\varphi(g_k) \mid 1 \le k \le m^2\right\}$ が $\mathrm{Mat}(m, \mathbb{C})$ の基底となるような $g_k \in G\ (1 \le k \le m^2)$ が存在する.

補題 6 (行列式の既約性 [8, pp.20-21]). 行列 $Y = (y_{ij})_{1 \le i \le m, 1 \le j \le m}$ の要素 y_{ij} を独立変数とする. このとき, m 次多項式 $\det Y$ は既約多項式となる.

では, Frobenius の定理の右辺の因子の既約性を示す. これは次の定理が成り立つことを示せばよい.

定理 7. 行列 $\varphi = (\varphi_{ij})_{1 \le i \le m, 1 \le j \le m}$ を G の m 次の表現とする. このとき, φ が $\mathbb{C}$ 上で既約であることの必要十分条件は, $\det \left(\sum_{g \in G} x_g \varphi(g) \right)$ が $\mathbb{C}$ 上で既約多項式となることである.

Proof. まず十分条件について, 対偶をとって示す. 表現 φ を既約でないとすれば, φ は直和分解できる. 表現 φ の直和分解を $\varphi = \varphi_1 \oplus \varphi_2$ とすれば,

$$\det\left(\sum_{g\in G} x_g\varphi(g)\right) = \det\left(\sum_{g\in G} x_g\varphi_1(g)\right)\det\left(\sum_{g\in G} x_g\varphi_2(g)\right)$$

となるので, 十分条件が成り立つことがわかる. 必要条件を示す. 補題 5 より, $\{\varphi(g_k) \mid 1 \le k \le m^2\}$ が $\mathrm{Mat}(m,\mathbb{C})$ の基底となるような $g_k \in G\,(1 \le k \le m^2)$ が存在する. したがって, E_{ij} を行列単位とすれば $C_{k,i,j} \in \mathbb{C}\,(1 \le i \le m, 1 \le j \le m, 1 \le k \le m^2)$ が存在して,

$$\varphi(g_k) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} C_{k,i,j}E_{ij}$$

とかける. ここで, すべての $g \in G \setminus \{g_k \mid 1 \le k \le m^2\}$ に対応する不定元 x_g を 0 とみなして,

$$y_{ij} = \sum_{k=1}^{m^2} x_{g_k} C_{k,i,j}$$

とすれば,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{m^2} x_{g_k}\varphi(g_k) &= \sum_{k=1}^{m^2} x_{g_k}\left(\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} C_{k,i,j}E_{ij}\right) \\
&= \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}\left(\sum_{k=1}^{m^2} x_{g_k}C_{k,i,j}\right)E_{ij} \\
&= \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} y_{ij}E_{ij} \\
&= (y_{ij})_{1\le i\le m, 1\le j\le m}
\end{aligned}$$

となる. このとき $\{y_{ij} \mid 1 \le i \le m, 1 \le j \le m\}$ は独立変数 $\{x_{g_k} \mid 1 \le k \le m^2\}$ の正則な 1 次変換なので, それぞれ独立な変数である. よって, 補題 6 より φ は既約となる. 必要条件も示せた. □

Frobenius の定理が成り立つことがわかった.

4 群行列と群行列式の拡張

第 2 節からわかるように, 群行列は群の正則表現を用いて定義できる. 本節では, 群環の正則表現 (多元環の正則表現) が群の正則表現を一般化したものであることを理解し, この群環の正則表現を用いて群行列と群行列式を拡張する.

集合 H を G の部分群, $G = t_1H \sqcup t_2H \sqcup \cdots \sqcup t_mH$ を G の H による左剰余類分解, $T = \{t_1, t_2, \ldots, t_m\}$ を剰余類分解の代表元の完全集合, そして, $RG = R \otimes \mathbb{C}G = \left\{\sum_{g\in G} \alpha_g g \mid \alpha_g \in R\right\}$ とする. 群環 RG の正則表現 (多元環の正則表現 (例えば [11] を参照)) は次で定義される.

定義 8 (群環の正則表現). 任意の $\alpha \in RG$ に対して, 以下を満たす $L_T(\alpha) \in \mathrm{Mat}(m, RH)$ がただ一つ存在する.

$$\alpha(t_1 \quad t_2 \quad \cdots \quad t_m) = (t_1 \quad t_2 \quad \cdots \quad t_m)L_T(\alpha).$$

このとき, 写像 $L_T : RG \ni \alpha \mapsto \in L_T(\alpha) \in \mathrm{Mat}(m, RH)$ を, T による RG から RH への *(左)* 正則表現という.

これから $\alpha = \sum_{g\in G} x_g g$ を一般元といい, また写像 $\dot{\chi} : G \to \mathbb{C}$ を, $g \in H$ ならば $\dot{\chi}(g) = 1$, $g \notin H$ ならば $\dot{\chi}(g) = 0$ で定義する. 以下の補題から, 群環の正則表現が群の正則表現の一般化であることがわかる.

補題 9 ([31, Lemma 5]). 元 α を一般元とする. このとき

$$L_T(\alpha)_{ij} = \sum_{g\in G} \dot{\chi}(t_i^{-1}gt_j)x_g t_i^{-1}gt_j$$

が成り立つ.

元 e を G の単位元とする. 仮に $H = \{e\}$ とすれば, 補題 9 から $L_T(\alpha)_{ij} = x_{g_i g_j^{-1}}e$ がわかる. このことから, 拡張した群行列を以下で与える.

定義 10 (拡張した群行列). 元 α を一般元とする. このとき

$$M(G : H) = L_T(\alpha)$$

を H へ拡張した G の群行列という.

また, 拡張した群行列式を以下で定義する.

定義 11 (拡張した群行列式). 部分群 H を可換とする. このとき

$$\Theta(G : H) = \det M(G : H)$$

を H へ拡張した G の群行列式という.

5 Dedekind の定理の拡張と一般化

まず Dedekind の定理について説明する. 以下にあるように, Dedekind の定理とは Frobenius の定理の G が可換な場合である.

定理 12 (Dedekind の定理 [3, Theorem 2]). 集合 G を有限可換群とする. このとき

$$\Theta(G) = \prod_{\chi \in \widehat{G}} \sum_{g \in G} \chi(g) x_g$$

が成り立つ.

Dedekind は G が可換である場合の群行列を対角化することにより, つまり群行列の固有値を求めることにより, Dedekind の定理を得た. 本節では, 拡張した群行列のあるスペクトルに着目して, Dedekind の定理の拡張を得る. まずは, G が可換である場合の群行列 $M(G:H)$ のスペクトルについて説明する.

有限群 G を可換, $\Phi_{(G:H)}(X) = \det(XI_m - M(G:H))$ とする. ただし, X は RG の元と可換な不定元とする.

定義 13 (1 つのスペクトル). 元 $\alpha_i \in RG$ が存在して, $\Phi_{(G:H)}(X)$ を

$$\Phi_{(G:H)}(X) = (X - \alpha_1)(X - \alpha_2) \cdots (X - \alpha_m)$$

と $\mathbb{C}G$ 上で因数分解できたとする. このとき, $\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m\}$ を $M(G:H)$ の 1 つのスペクトルという.

拡張した群行列のスペクトルが一意的でないことを, 次の例で確認する.

例 14. 群 $G = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \{0, 1\}$, $H = \{0\}$ とする. このとき

$$\begin{aligned}\Phi_{(G:H)}(X) &= \det \begin{bmatrix} X - x_0 0 & x_1 0 \\ x_1 0 & X - x_0 0 \end{bmatrix} \\ &= X^2 - 2x_0 0 X + (x_0^2 - x_1^2) 0\end{aligned}$$

となり, これは

$$\begin{aligned}\Phi_{(G:H)}(X) &= (X - (x_0 0 + x_1 0))(X - (x_0 0 - x_1 0)) \\ &= (X - (x_0 0 + x_1 1))(X - (x_0 0 - x_1 1))\end{aligned}$$

と 2 通りに因数分解できることがわかる. よって, 拡張した群行列のスペクトルは一意的でないことがわかった.

拡張した群行列のスペクトルに関して, 次のことがわかる.

定理 15. 写像 $f : G \to G$ を準同型で, 任意の $h \in H$ に対して $f(h) = h$ を満たすものとする. このとき

$$\left\{ \sum_{g \in G} \chi(gH) x_g f(g) \mid \chi \in \widehat{G/H} \right\}$$

は $M(G:H)$ の 1 つのスペクトル.

拡張した群行列のあるスペクトルを用いて, Dedekind の定理を拡張する. そのために RG 上に作用素を定義し, また指標に関する補題を 2 つ用意する.

定義 16 (群環上の作用素). 指標 $\chi \in \widehat{G}$ に対して, $T_\chi : RG \to RG$ を R 線型で, $T_\chi(g) = \chi(g)g$ を満たす写像とする.

任意の $\chi, \chi' \in \widehat{G}$ に対して $T_{\chi'} \circ T_\chi = T_{\chi' \circ \chi}$, 一般元 α に対して $T_\chi(\alpha) = \sum_{g \in G} \chi(g) x_g g$ が成り立つことに注意する.

補題 17 ([9, LEMMA 2.22]). 集合 $\widehat{G}_H = \{\chi \in \widehat{G} \mid \chi(h) = 1, \forall h \in H\}$ は $\widehat{G}$ の部分群で, $\widehat{G/H}$ と同一視できる.

自然数 l を H の位数, 部分群 $\widehat{G}_H$ による $\widehat{G}$ の左剰余類分解を $\widehat{G} = \chi_1 \widehat{G}_H \sqcup \chi_2 \widehat{G}_H \sqcup \cdots \sqcup \chi_l \widehat{G}_H$, この剰余類分解の代表元の完全集合を $U = \{\chi_i \mid 1 \leq i \leq l\}$, そして U の元 (写像) を H に制限したもの全体の成す集合を, $U|_H$ とする.

補題 18 ([24, Lemma 3.5]). 集合 $U|_H = \widehat{H}$ となる.

では, Dedekind の定理の拡張を与える.

定理 19 (Dedekind の定理の拡張 [24, Theorem 3.8]). 集合 G を有限可換群, H を G の部分群とする. このとき次が成り立つ.

$$\Theta(G : \{e\}) = \prod_{\chi \in \widehat{H}} T_\chi \left(\Theta(G : H)\right).$$

Proof. 定理 15 と補題 17 と 18 より,

$$\begin{aligned}
\Theta(G : \{e\}) &= \prod_{\chi \in \widehat{G/\{e\}}} \sum_{g \in G} \chi(g\{e\}) x_g g \\
&= \prod_{\chi \in \widehat{G}} \sum_{g \in G} \chi(g) x_g g \\
&= \prod_{\chi \in \widehat{G}} \left(T_\chi \sum_{g \in G} x_g g \right) \\
&= \prod_{\chi \in U} T_\chi \left(\prod_{\chi' \in \widehat{G}_H} \sum_{g \in G} \chi'(g) x_g g \right) \\
&= \prod_{\chi \in U} T_\chi \left(\prod_{\chi' \in \widehat{G/H}} \sum_{g \in G} \chi'(gH) x_g g \right) \\
&= \prod_{\chi \in U} T_\chi \left(\Theta(G : H)\right) \\
&= \prod_{\chi \in U|_H} T_\chi \left(\Theta(G : H)\right) \\
&= \prod_{\chi \in \widehat{H}} T_\chi \left(\Theta(G : H)\right)
\end{aligned}$$

となる. 証明できた. □

写像 $F: RG \to R$ を, R 線型で $F(g)=1$ を満たす写像とする. Dedekind の定理の拡張より, Dedekind の定理の一般化が導かれる.

定理 20 (Dedekind の定理の一般化 [24, Theorem 3.10]). 集合 G を有限可換群, H を G の部分群とする. このとき次が成り立つ.

$$\Theta(G) = \prod_{\chi \in \widehat{H}} F\left(T_\chi\left(\Theta(G:H)\right)\right).$$

Dedekind の定理の一般化が, Dedekind の定理の一般化を導くことを次の例で確かめる.

例 21. 部分群 $H=G$ とする. このとき

$$\begin{aligned}\Theta(G) &= \prod_{\chi \in \widehat{G}} F\left(T_\chi\left(\Theta(G:G)\right)\right) \\ &= \prod_{\chi \in \widehat{G}} F\left(T_\chi\left(\sum_{g \in G} x_g g\right)\right) \\ &= \prod_{\chi \in \widehat{G}} F\left(\sum_{g \in G} \chi(g) x_g g\right) \\ &= \prod_{\chi \in \widehat{G}} \sum_{g \in G} \chi(g) x_g\end{aligned}$$

となり, 確かに *Dedekind* の定理が導かれた.

6 指数 2 の可換な部分群を持つ群のあるスペクトル

前節では, G が可換である場合の $M(G:H)$ のあるスペクトルに着目することによって, Dedekind の定理の一般化を得た. 有限群 G が非可換の場合の $M(G:H)$ のスペクトル (G が可換の場合にしか定義していないが) がどのようになっているのかは興味深い問題である. といっても, 一般の $M(G:H)$ のスペクトルを求めるのは困難である (そもそも, $M(G:H)$ の行列式の定義が問題になる (これと関連する研究に [25], [26] がある)). 本節では, G と H が特別な場合の, $M(G:H)$ のスペクトルを考察する.

部分群 H を G の指数 2 の可換な部分群で, H による G の左剰余類分解を $G = H \sqcup tH$ とする. このとき $RG = RH \oplus tRH$ に注意すれば, 一般元 α は, $\beta, \gamma \in RH$ が存在して, $\alpha = \beta + t\gamma$ と書くことができて,

$$M(G:H) = \begin{bmatrix} \beta & t\gamma t \\ \gamma & t^{-1}\beta t \end{bmatrix}$$

がわかる. よって,

$$\Phi_{(G:H)}(X) = \det \begin{bmatrix} X-\beta & t\gamma t \\ \gamma & X - t^{-1}\beta t \end{bmatrix}$$
$$= X^2 - (\beta + t^{-1}\beta t)X - \gamma t \gamma t$$

となる. ここで $\overline{\alpha} = t^{-1}\beta t - t\gamma$ とすれば, $\Phi_{(G:H)}(X)$ は因数分解できることがわかる.

$$\Phi_{(G:H)}(X) = (X-\alpha)(X-\overline{\alpha}).$$

拡張した群行列 $M(G:H)$ のスペクトルとして, $\{\alpha, \overline{\alpha}\}$ があることがわかった.

スペクトル $\{\alpha, \overline{\alpha}\}$ に関して注意したいことがある. 実は α と $\overline{\alpha}$ は可換であることがわかる. したがって, $\alpha + \overline{\alpha} = \mathrm{Tr}(M(G:H))$, $\alpha\overline{\alpha} = \Theta(G:H)$ が成り立つ.

Remark 22. 拡張した群行列 $M(G:H)$ のスペクトルは, $\{\alpha, \overline{\alpha}\}$ だけではない. 例えば, $\{\beta - t\gamma, t^{-1}\beta t + t\gamma\}$ も $M(G:H)$ のスペクトルである.

スペクトル $\{\alpha, \overline{\alpha}\}$ から, 群環 $\mathbb{C}G$ 上の共役写像が見えてくる. このことについて説明する.

集合 $Z(RG)$ を RG の中心とする. いま, 不定元 x_g を $x_g \in \mathbb{C}$ とみなし, 一般元 α を $\mathbb{C}G$ の任意の元と考えると, 写像 $f : \mathbb{C}G \ni \alpha \mapsto \overline{\alpha} \in \mathbb{C}G$ が与えられる. この写像は以下の性質をもつことがわかるので, 共役写像ということにする.

定理 23 ([27, Theorem 33]). 任意の $a, b \in \mathbb{C}G$ に対して, 次が成り立つ.

(1) $\overline{\overline{a}} = a$.

(2) $a + \overline{a}, a\overline{a} = \overline{a}a \in Z(\mathbb{C}G)$.

(3) $\overline{ab} = \overline{b}\,\overline{a}$.

(4) $a = \overline{a}$ であることの必要十分条件は, $a \in Z(\mathbb{C}G)$ となることである.

Remark 24. 拡張した群行列 $M(G:H)$ のスペクトルとして $\{\alpha, \overline{\alpha}\}$ があるが, これは $M(G:H)$ が α と $\overline{\alpha}$ に直和分解できることを意味せず, またこのように直和分解することはできない. それは $M(G:H) = L_T(\alpha)$ であるので, $M(G:H)$ を直和分解したときに反同型写像が表れることがないことよりわかる.

共役写像を用いて, 2×2 行列の逆行列の式を与える.

定理 25 ([27, Theorem 34]). 行列 $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathrm{Mat}(m, \mathbb{C}G)$ に逆行列が存在すれば,

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \overline{d} & \overline{b} \\ \overline{c} & \overline{a} \end{bmatrix} (A\overline{A} - BC)^{-1} \begin{bmatrix} \overline{A} & -B \\ -C & A \end{bmatrix}$$

となる. ただし,

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & \overline{A} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a\overline{d} + b\overline{c} & a\overline{b} + b\overline{a} \\ c\overline{d} + d\overline{c} & c\overline{b} + d\overline{a} \end{bmatrix}$$

とする.

Proof. 定理 23 から $A, B, C, \overline{A}$ は可換であることと,

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{d} & \overline{b} \\ \overline{c} & \overline{a} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & \overline{A} \end{bmatrix}$$

となることから直ちにわかる. □

7 Dedekindの定理のさらなる拡張と拡張した群行列式の意味と性質

第 5 節では, 有限群 G が可換である場合の $M(G:H)$ のあるスペクトルに着目することにより, Dedekind の定理を得た. 本節では, G を有限群, H を可換群として, 拡張した群行列式 $\Theta(G:H)$ に着目して, Dedekind の定理のさらなる拡張と一般化を与える. また, 拡張した群行列式 $\Theta(G:H)$ の意味と性質について述べる.

まずは, 拡張した群行列式の意味について述べる. 拡張した群行列式は, 群環 $\mathbb{C}G$ の元が可逆であるか否かを判別する式であることがわかる. つまり次が成り立つ.

定理 26 ([27, Theorem 24]). 不定元 x_g を $x_g \in \mathbb{C}$ とし, 一般元 α を任意の $\mathbb{C}G$ の元とみなす. このとき, α が可逆であることの必要十分条件は, $\Theta(G:H) \in \mathbb{C}H$ が可逆となることである.

また, $\Theta(G:H)$ について次のことがわかる.

系 27 ([27, Corollary 20]). 可換群 H が G の正規部分群ならば, $\Theta(G:H) \in Z(RG) \cap RH$ が成り立つ.

では, Dedekind の定理のさらなる拡張を与える.

定理 28 (Dedekind の定理のさらなる拡張 [27, Theorem 30]). 集合 G を有限群, H を G の可換な部分群とする. このとき次が成り立つ.

$$\Theta(G:\{e\}) = \prod_{\chi\in\widehat{H}} T_\chi\left(\Theta(G:H)\right).$$

Dedekind の定理のさらなる拡張から, Dedekind の定理のさらなる一般化が導かれる.

定理 29 (Dedekind の定理のさらなる一般化 [27, Theorem 31]). 集合 G を有限群, H を G の部分群とする. このとき次が成り立つ.

$$\Theta(G) = \prod_{\chi\in\widehat{H}} F\left(T_\chi\left(\Theta(G:H)\right)\right).$$

Dedekind の定理のさらなる拡張の証明について触れておく. 詳細は論文 [27] を参照して欲しいが, 証明の核心部分は, 以下の図式が可換であることを示すことである.

$$\begin{tikzcd}
RG \arrow[r, "\text{正則表現}"] \arrow[d, "\text{正則表現}"'] & \mathrm{Mat}(m, RH) \arrow[r, "\det"] \arrow[d, phantom, "\circlearrowright"] & RH \arrow[d, "\text{正則表現}"] \\
\mathrm{Mat}(n, R\{e\}) \arrow[r, "\det"'] & R\{e\} & \mathrm{Mat}(l, R\{e\}) \arrow[l, "\det"]
\end{tikzcd}$$

8 Frobenius の定理の一般化

有限群 G や H を可換と仮定しない場合, $M(G:H)$ のスペクトルや行列式を考察することは難しそうである. しかしながら, 以下の定理を得ることができた. この Frobenius の定理の一般化は, 第 7 節の可換図式に一工夫を与えると導ける.

定理 30 (Frobenius の定理の一般化 [29, Theorem 12]). 集合 G を有限群, H を G の部分群, そして, $\otimes$ を *Kronecker* 積とする. 任意の $h\in H$ に対して $C_h \in \mathrm{Mat}(m,R)$ が存在して, 次が成り立つ.

$$\Theta(G) = \prod_{\psi\in\widehat{H}} \det\left(\sum_{h\in H}\psi(h)\otimes C_h\right)^{\deg\psi}.$$

定理 2 と 30 より, G の既約表現の次数に関する系が得られる.

系 31 ([29, Corollary 13]). 集合 G を有限群, H を G の部分群とする. 任意の $\varphi\in\widehat{G}$ に対して, 次が成り立つ.

$$\deg\varphi \leq [G:H]\times\max\left\{\deg\psi \mid \psi\in\widehat{H}\right\}.$$

系 31 は, Frobenius 相互律からも得られる ([14, 例 8.15] の $H=A$ を非可換として考えればすぐにわかる).

参考文献

[1] ARTIN, Emil. *Geometric Algebra.* Interscience Publishers, Inc., 1957.

[2] ASLAKSEN, Helmer. Quaternionic determinants. *The Mathematical Intelligencer*, 1996, 18.3: 57–65.

[3] CONRAD, Keith. On the origin of representation theory. *Enseignement Mathematique*, 1998, 44: 361–392.

[4] FORMANEK, Edward; SIBLEY, David. The group determinant determines the group. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 1991, 112.3: 649–656.

[5] HALL, Marshall. *The Theory of Groups.* American Mathematical Society, 1976.

[6] HUANG, An. Noncommutative multiplicative norm identities for the quaternions and the octonions. *arXiv preprint arXiv:1102.2657*, 2011.

[7] HUPPERT, Bertram. *Endliche Gruppen I.* Springer-Verlag, 2013.

[8] 伊理 正夫. 一般線型代数. 岩波書店, 2003.

[9] ISAACS, I. Martin. *Character Theory of Finite Groups.* Courier Corporation, 2013.

[10] ITOH, Minoru; UMEDA, Tôru. On central elements in the universal enveloping algebras of the orthogonal Lie algebras. Compositio Mathematica, 2001, 127.03: 333–359.

[11] 岩永恭雄; 佐藤眞久. 環と加群のホモロジー代数的理論. 日本評論社, 2002.

[12] JOHNSON, Kenneth W. On the group determinant. In: *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society.* Cambridge University Press, 1991, 109.02: 299–311.

[13] 清田 正夫. 群指標とその応用. 数理解析研究所講究録, 2001, 1214: 76–82.

[14] 近藤 武. 群論. 岩波書店, 2002.

[15] LAM, T. Y. Representations of finite groups: A hundred years, part II. *Notices of the AMS*, 1998, 45.4: 465–474.

[16] SCHUR, I. Neuer Beweis eines Satzes über endliche Gruppen, *Sitzungsberichteder Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin*, 1902, 1013–1019.

[17] STEINBERG, Benjamin. *Representation Theory of Finite Groups: An Introductory Approach.* Springer Science ampersand Business Media, 2011.

[18] 鈴木 達夫. 非可換行列式とその応用. 数理解析研究所講究録, 2006, 1500: 26–45.

[19] 梅田 亨. 群行列式型 Capelli 恒等式. preprint.

[20] UMEDA, Tôru. Remarks on the Capelli identities for reducible modules. preprint (2016).

[21] 梅田 亨. 跡公式としての Capelli 恒等式. "数理科学" No. 429(1999 年 3 月号), 39–46.

[22] 梅田 亨. 誘導表現の一般化について (On Some Variants of Induced Representations). 表現論シンポジウム講演集 (2012), 7–17.

[23] VAN DER WAERDEN, Bartel L. *A History of Algebra: From al-Khwārizmī to Emmy Noether.* Springer-Verlag, 1985.

[24] YAMAGUCHI, Naoya. An extension and a generalization of Dedekind's theorem. *International Journal of Group Theory*, 2017, 6.3: 5–11.

[25] YAMAGUCHI, Naoya. Capelli elements of the group algebra. *arXiv preprint arXiv:1611.00662*, 2016.

[26] 山口 尚哉. Capelli 恒等式の有限群論への応用. 数理解析研究所講究 (to appear).

[27] YAMAGUCHI, Naoya. Factorizations of group determinant in group algebra for any abelian subgroup. *arXiv preprint arXiv:1610.06047*, 2016.

[28] YAMAGUCHI, Naoya. Factorization of group determinant in some group algebras. *arXiv preprint arXiv:1405.1900*, 2014.

[29] YAMAGUCHI, Naoya. Generalization of Frobenius' theorem for group determinants. *arXiv preprint arXiv:1610.06489*, 2016.

[30] 山口 尚哉. 群行列式の既約分解の群環版. 数理解析研究所講究録, 2014, 1925: 15–25.

[31] YAMAGUCHI, Naoya. Proof of some properties of transfer using noncommutative determinants. *arXiv preprint arXiv:1602.08667*, 2016.